

# Algorithmique et structures de données

Diviser pour régner

---

Julien Hauret

Lundi 6 février 2022

# Plan de la séance

## Rappels

Diviser pour régner

Quicksort

Tri fusion

Transformée de Fourier rapide

Codons!

# Les tris

Il existe de nombreux algorithmes de tris :

- en complexité quadratique  $O(n^2)$  (tri à bulles, tri par insertion, tri par sélection...)
- en complexité linéarithmique en moyenne  $O(n \cdot \log(n))$  (tri rapide)
- en complexité linéarithmique dans le pire cas  $O(n \cdot \log(n))$  (tri par tas, tri fusion)

## Complexité minimale des tris

Dans le cas général, un algorithme de tri est au moins  $O(n \cdot \log(n))$ .

## En pratique

En pratique, on utilise le tri rapide (*QuickSort*) car il offre les meilleures performances et on utilise une contre-mesure pour éviter de se trouver dans le pire cas.

Il existe de nombreux algorithmes de tris :

- en complexité quadratique  $O(n^2)$  (tri à bulles, tri par insertion, tri par sélection...)
- en complexité linéarithmique en moyenne  $O(n \cdot \log(n))$  (tri rapide)
- en complexité linéarithmique dans le pire cas  $O(n \cdot \log(n))$  (tri par tas, tri fusion)

## Complexité minimale des tris

Dans le cas général, un algorithme de tri est au moins  $O(n \cdot \log(n))$ .

## En pratique

En pratique, on utilise le tri rapide (*QuickSort*) car il offre les meilleures performances et on utilise une contre-mesure pour éviter de se trouver dans le pire cas.

# Les tris

Il existe de nombreux algorithmes de tris :

- en complexité quadratique  $O(n^2)$  (tri à bulles, tri par insertion, tri par sélection...)
- en complexité linéarithmique en moyenne  $O(n \cdot \log(n))$  (tri rapide)
- en complexité linéarithmique dans le pire cas  $O(n \cdot \log(n))$  (tri par tas, tri fusion)

## Complexité minimale des tris

Dans le cas général, un algorithme de tri est au moins  $O(n \cdot \log(n))$ .

## En pratique

En pratique, on utilise le tri rapide (*QuickSort*) car il offre les meilleures performances et on utilise une contre-mesure pour éviter de se trouver dans le pire cas.

# Plan de la séance

## Rappels

Diviser pour régner

Quicksort

Tri fusion

Transformée de Fourier rapide

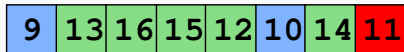
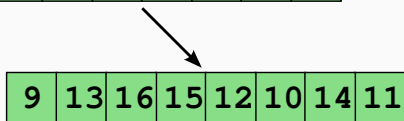
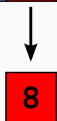
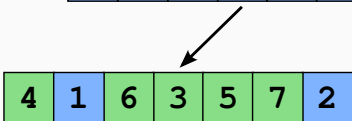
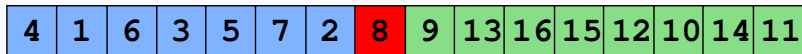
Codons!

*Diviser pour régner*

## Principe

Diviser un problème en sous-problèmes plus petits, plus faciles à résoudre.

## Rappel – principe du tri rapide





# QuickSort : complexité

Le parcours du tableau implique  $N - 1$  comparaison. Puis on réitère l'opération sur chaque moitié de tableau.

En notant  $i$  la position du pivot, la complexité s'écrit :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \mathbb{E}[C_{moy}(i - 1) + C_{moy}(N - i)] ,$$

car le tri du tableau de longueur  $N$  implique :

- $N - 1$  comparaisons pour placer le pivot,
- le tri d'un tableau de longueur  $i - 1$  (à gauche du pivot),
- le tri d'un tableau de longueur  $N - i$  (à droite du pivot).

## QuickSort : complexité

Le pivot peut se retrouver à n'importe quelle position de façon équiprobable :

$$\mathbb{E}[C_{moy}(i-1) + C_{moy}(N-i)] = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N [C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p)]$$

puis, en réinjectant dans la complexité moyenne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N [C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p)] .$$

## QuickSort : complexité

Le pivot peut se retrouver à n'importe quelle position de façon équiprobable :

$$\mathbb{E}[C_{moy}(i-1) + C_{moy}(N-i)] = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N [C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p)]$$

puis, en réinjectant dans la complexité moyenne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N [C_{moy}(p-1) + C_{moy}(N-p)] .$$

## QuickSort : complexité

$$C_{\text{moy}}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{\text{moy}}(p-1) + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{\text{moy}}(N-p) .$$

Un changement de variable  $q = N - p$  dans la seconde somme donne :

$$C_{\text{moy}}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{\text{moy}}(p-1) + \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N C_{\text{moy}}(q-1)$$

Autrement dit, la complexité se réécrit :

$$C_{\text{moy}}(N) = N - 1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^N C_{\text{moy}}(p-1)$$

## QuickSort : complexité

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1) + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(N-p) .$$

Un changement de variable  $q = N - p$  dans la seconde somme donne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1) + \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N C_{moy}(q-1)$$

Autrement dit, la complexité se réécrit :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1)$$

## QuickSort : complexité

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1) + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(N-p) .$$

Un changement de variable  $q = N - p$  dans la seconde somme donne :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1) + \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N C_{moy}(q-1)$$

Autrement dit, la complexité se réécrit :

$$C_{moy}(N) = N - 1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1)$$

## QuickSort : complexité

En multipliant par  $N$  des deux côtés :

$$NC_{moy}(N) = N(N-1) + 2 \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1) \quad (a)$$

En outre, pour un tableau de taille  $N-1$ , la relation (a) se réécrit :

$$(N-1)C_{moy}(N-1) = (N-1).(N-2) + 2 \sum_{p=1}^{N-1} C_{moy}(p-1) \quad (b)$$

En calculant (a) - (b), il vient :

$$NC_{moy}(N) - (N-1)C_{moy}(N-1) = 2N + 2C_{moy}(N-1) \quad .$$

## QuickSort : complexité

En multipliant par  $N$  des deux côtés :

$$NC_{moy}(N) = N(N-1) + 2 \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1) \quad (a)$$

En outre, pour un tableau de taille  $N-1$ , la relation (a) se réécrit :

$$(N-1)C_{moy}(N-1) = (N-1).(N-2) + 2 \sum_{p=1}^{N-1} C_{moy}(p-1) \quad (b)$$

En calculant (a) - (b), il vient :

$$NC_{moy}(N) - (N-1)C_{moy}(N-1) = 2N + 2C_{moy}(N-1) \quad .$$



## QuickSort : complexité

En multipliant par  $N$  des deux côtés :

$$NC_{moy}(N) = N(N-1) + 2 \sum_{p=1}^N C_{moy}(p-1) \quad (a)$$

En outre, pour un tableau de taille  $N-1$ , la relation  $(a)$  se réécrit :

$$(N-1)C_{moy}(N-1) = (N-1).(N-2) + 2 \sum_{p=1}^{N-1} C_{moy}(p-1) \quad (b)$$

En calculant  $(a) - (b)$ , il vient :

$$NC_{moy}(N) - (N-1)C_{moy}(N-1) = 2N + 2C_{moy}(N-1) \quad .$$

# QuickSort : complexité

En simplifiant :

$$NC_{moy}(N) = 2N + (N+1)C_{moy}(N-1) .$$

On divise par  $N(N+1)$  :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C_{moy}(N-1)}{N}$$

Puis par récurrence :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \sum_{k=3}^{N+1} \frac{2}{k} + \frac{C_{moy}(1)}{2}$$

# QuickSort : complexité

En simplifiant :

$$NC_{moy}(N) = 2N + (N+1)C_{moy}(N-1) .$$

On divise par  $N(N+1)$  :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C_{moy}(N-1)}{N}$$

Puis par récurrence :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \sum_{k=3}^{N+1} \frac{2}{k} + \frac{C_{moy}(1)}{2}$$

# QuickSort : complexité

En simplifiant :

$$NC_{moy}(N) = 2N + (N+1)C_{moy}(N-1) .$$

On divise par  $N(N+1)$  :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \frac{2}{N+1} + \frac{C_{moy}(N-1)}{N}$$

Puis par récurrence :

$$\frac{C_{moy}(N)}{N+1} = \sum_{k=3}^{N+1} \frac{2}{k} + \frac{C_{moy}(1)}{2}$$

# QuickSort : complexité

Comme :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \log(N)$$

en remplaçant dans la complexité moyenne, on obtient l'équivalence

$$C_{moy}(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} (N+1)\log(N) + (N+1)\frac{C_{moy}(1)}{2}$$

Finalement :

$$C_{moy}(N) = O(N \log(N))$$

# QuickSort : complexité

Comme :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \log(N)$$

en remplaçant dans la complexité moyenne, on obtient l'équivalence

$$C_{moy}(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} (N+1)\log(N) + (N+1)\frac{C_{moy}(1)}{2}$$

Finalement :

$$C_{moy}(N) = O(N \log(N))$$

Le principe du tri fusion est proche du tri rapide. L'idée est de couper un tableau en deux, de trier chaque moitié du tableau, puis de remplir un nouveau tableau avec les sous-tableaux triés.

1	7	3	9	5	10	4	6	8	2
---	---	---	---	---	----	---	---	---	---

1	7	3	9	5	10	4	6	8	2
---	---	---	---	---	----	---	---	---	---

1	3	5	7	9	2	4	6	8	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



# Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique  $N-1$  comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne,  $i \simeq \frac{N}{2}$  :

$$C_N = N + 2 \cdot C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 \cdot C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k \cdot C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après  $k = \log_2(N)$  étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

# Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique  $N-1$  comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne,  $i \simeq \frac{N}{2}$  :

$$C_N = N + 2 \cdot C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 \cdot C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k \cdot C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après  $k = \log_2(N)$  étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

# Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique  $N-1$  comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne,  $i \simeq \frac{N}{2}$  :

$$C_N = N + 2 \cdot C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 \cdot C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k \cdot C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après  $k = \log_2(N)$  étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

# Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique  $N-1$  comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne,  $i \simeq \frac{N}{2}$  :

$$C_N = N + 2 \cdot C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 \cdot C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k \cdot C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après  $k = \log_2(N)$  étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

# Calcul de la complexité

Le parcours du tableau implique  $N-1$  comparaison. Donc :

$$C_N = (N-1) + C_i + C_{N-i-1}$$

En moyenne,  $i \simeq \frac{N}{2}$  :

$$C_N = N + 2 \cdot C_{\frac{N}{2}}$$

Au rang suivant :

$$C_N = 2N + 4 \cdot C_{\frac{N}{4}}$$

Puis :

$$C_N = kN + 2^k \cdot C_{\frac{N}{2^k}}$$

La récurrence se termine après  $k = \log_2(N)$  étapes, donc :

$$C_N = N \log N + NC_1 = O(N \log N)$$

Le tri fusion est un  $O(N \log(N))$  dans tous les cas. Cependant il est en moyenne plus lent que Quicksort, c'est pourquoi ce dernier est le plus utilisé.

# Plan de la séance

Rappels

Diviser pour régner

Quicksort

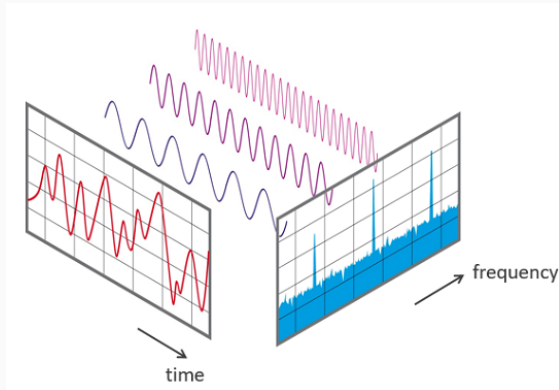
Tri fusion

Transformée de Fourier rapide

Codons!

# Transformée de Fourier discrète

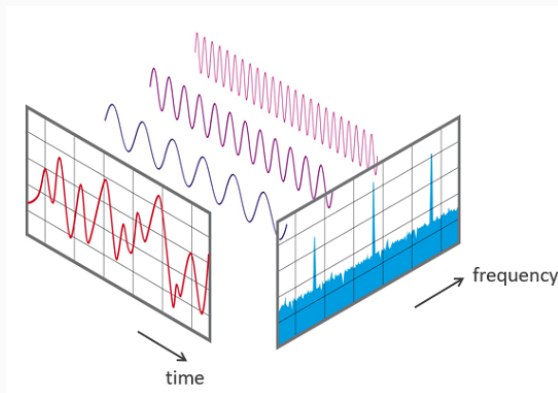
La transformée de Fourier discrète (*Discrete Fourier Transform* ou DFT) est un algorithme central en traitement du signal et des images.





# Transformée de Fourier discrète

La transformée de Fourier discrète (*Discrete Fourier Transform* ou DFT) est un algorithme central en traitement du signal et des images.



Digression spectrogramme

Soit l'espace complexe  $\mathbb{C}^N$  et la forme hermitienne :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f[j] \overline{g[j]}.$$

La famille des vecteur  $e_k$  :

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( e^{\frac{2i\pi}{N} 0 \cdot k}, e^{\frac{2i\pi}{N} 1 \cdot k}, \dots, e^{\frac{2i\pi}{N} (N-1) \cdot k} \right)$$

pour  $k = 0, \dots, N-1$  est une famille libre orthonormale (donc une base).

Soit  $f$  un tableau de  $N$  nombres complexes. Comme  $(e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$  est une base,  $f$  se décompose de la façon suivante :

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} \langle f, e_j \rangle e_j$$

Les coefficients de la transformée de Fourier discrète de  $f$  sont les coordonnées de  $f$  dans cette nouvelle base.

## Expression

La transformée de Fourier discrète transforme un tableau  $f$  de  $N$  nombres complexes en un tableau  $DFT(f)$  de même taille par l'opération suivante :

$$DFT(f)[k] = \langle f, e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-\frac{2i\pi}{N}jk}.$$

## Interprétation physique

Le coefficient  $DFT(f)[k]$  représente l'énergie du signal  $f$  à la fréquence  $k$ .

Soit  $f$  un tableau de  $N$  nombres complexes. Comme  $(e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$  est une base :

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} \langle f, e_j \rangle e_j$$

ou encore :

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} \text{DFT}(f)[j] e_j$$

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j] e_j$$

$$f[k] = \left( \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j] e_j \right) [k]$$

$$f[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j] e^{+ \frac{2i\pi}{N} jk}$$

Notant  $IDFT$  la transformée inverse ( $IDFT \circ DFT = Id$ ) :

$$f[k] = IDFT(DFT(f))[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} DFT(f)[j] e^{+ \frac{2i\pi}{N} jk}$$

Pour résumer,  $f$  un tableau de  $N$  nombres complexes :

## Discrete Fourier Transform

$$DFT(f)[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-\frac{2i\pi}{N}jk}.$$

## Inverse Discrete Fourier Transform

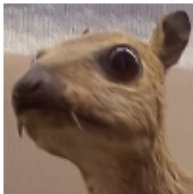
$$IDFT(g)[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} g[j] e^{+\frac{2i\pi}{N}jk}.$$

# Pourquoi?

## Motivation

La transformée de Fourier transforme les convolutions (= opérations de filtrage) en multiplication. Il est bien plus rapide de faire une multiplication dans l'espace de Fourier qu'une convolution dans l'espace initial.

Input image



Convolution  
Kernel

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Feature map

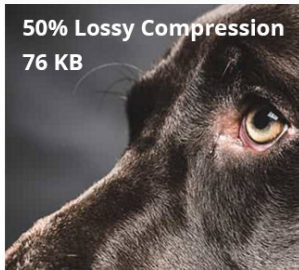




# Pourquoi?

## Motivation

La transformée de Fourier transforme les convolutions (= opérations de filtrage) en multiplication. Il est bien plus rapide de faire une multiplication dans l'espace de Fourier qu'une convolution dans l'espace initial.



$$DFT(f)[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-\frac{2i\pi}{N}jk}.$$

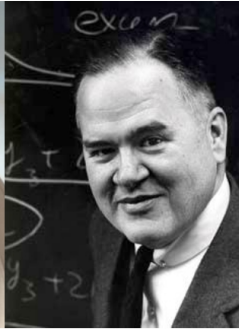
Calculer un terme :  $O(N)$ .

Calculer tous les termes :  $O(N^2)$

# Fast Fourier Transform



James William Cooley  
(1926-)



John Wilder Tukey  
(1915-2000)

La FFT est un algorithme introduit par Cooley and Tukey en 1965. Elle permet de calculer la DFT en temps  $N \log(N)$ .

Elle utilise une approche **diviser pour régner**.

On sépare la somme dans la DFT en indices **pairs** et **impairs** :

$$\sqrt{N} \text{DFT}(f)[k] = \sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j] e^{-\frac{2i\pi}{N} (2j)k} + \sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j+1] e^{-\frac{2i\pi}{N} (2j+1)k},$$

dont on déduit facilement

$$\sqrt{N} \text{DFT}(f)[k] = \sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j] e^{-\frac{2i\pi}{N/2} jk} + e^{-\frac{2i\pi}{N} k} \sum_{j=0}^{N/2-1} f[2j+1] e^{-\frac{2i\pi}{N/2} jk}.$$

On retrouve en fait le calcul de la transformée de Fourier discrète sur les deux sous-tableaux :

$$\sqrt{N}DFT(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}} \left( DFT(f_{\text{pair}})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} DFT(f_{\text{impair}})[k] \right) \quad (1)$$

- $f_{\text{pair}}$  est le sous-tableau des indices pairs de  $f$  :  $f[0:n:2]$  ;
- $f_{\text{impair}}$  est celui des indices impairs :  $f[1:n:2]$  .

$$\sqrt{N}DFT(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}} \left( DFT(f_{\text{pair}})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} DFT(f_{\text{impair}})[k] \right) \quad (2)$$

Le problème est alors de :

1. Calculer la DFT des indices pairs de  $f$ .
2. Calculer la DFT des indices impairs de  $f$ .
3. Combiner en  $O(N)$  les deux suivant la formule ci-dessus.

Le calcul de complexité de la FFT (*Fast Fourier Transform*) est analogue à celle du tri fusion :

- calcul sur les tableau de taille  $N/2$
- relation de récurrence  $C(N) \approx N + 2 * C(\frac{N}{2})$
- complexité en  $O(N \log(N))$

$$\sqrt{N} \text{DFT}(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}} \left( \text{DFT}(f_{0:2:N-2})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} \text{DFT}(f_{1:2:N-1})[k] \right)$$

Relation de récurrence :

1. Calculer la DFT des indices pairs de  $f$ .
2. Calculer la DFT des indices impairs de  $f$ .
3. Combiner en  $O(N)$  les deux suivant la formule ci-dessus.



# Implémentation

$$\sqrt{N} \text{DFT}(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}} \left( \text{DFT}(f_{0:2:N-2})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} \text{DFT}(f_{1:2:N-1})[k] \right)$$

Les sous DFT sont de longueur  $N/2$ , donc définies pour  $0 \leq k \leq N/2$ . En remarquant que :

$$\exp\left(-\frac{2i\pi}{N/2}j(k + N/2)\right) = \exp\left(-\frac{2i\pi}{N/2}jk\right)$$

$$\exp\left(-\frac{2i\pi}{N}(k + N/2)\right) = \exp\left(-\frac{2i\pi}{N}k\right)$$

on s'aperçoit qu'il y a périodicité de la DFT :

$$\text{DFT}_{\text{paire}}\left[k + \frac{N}{2}\right] = \text{DFT}_{\text{paire}}[k],$$

$$\text{DFT}_{\text{impaire}}\left[k + \frac{N}{2}\right] = \text{DFT}_{\text{impaire}}[k] \quad .$$

$$\sqrt{N} \text{DFT}(f)[k] = \sqrt{\frac{N}{2}} \left( \text{DFT}(f_{0:2:N-2})[k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} \text{DFT}(f_{1:2:N-1})[k] \right)$$

1. Calculer la DFT des indices pairs de  $f$ .
2. Calculer la DFT des indices impairs de  $f$ .
3. Combiner en  $O(N)$  les deux suivant la formule ci-dessus.
  - Copier  $f$  dans un tableau temporaire **buffer**. On a dans les indices pairs et impairs les résultats des sous-DFT (non normalisées).
  - Boucle de  $k = 0$  à  $N/2 - 1$  :

$$f[k] \leftarrow \text{buffer}[2 * k] + e^{-\frac{2i\pi}{N}k} \text{buffer}[2 * k + 1]$$

$$f[k + N/2] \leftarrow \text{buffer}[2 * k] - e^{-\frac{2i\pi}{N}k} \text{buffer}[2 * k + 1].$$

- Le facteur  $t_k = e^{-\frac{2i\pi}{N}k}$  est appelé *twiddle*. On en fait un calcul rapide par la relation de récurrence de suite géométrique  $t_{k+1} = r t_k$ , dont la raison  $r = e^{-\frac{2i\pi}{N}}$  est pré-calculée.
- On alloue une seule fois *buffer* et on le passe dans les arguments de la fonction récursive.

# Dérivation

Il est possible de définir un équivalent de dérivation pour la DFT.

Soit  $e_j(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(\frac{2i\pi}{N} jx)$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  :  $e_j(k) = e_j[k]$

Soit  $f$  la fonction périodique :

$$f(x) = \sum_j DFT(f)[j] e_j(x),$$

et  $f(k) = f[k]$  :

$$f'(x) = \sum_j DFT(f)[j] e'_j(x) = \sum_j \frac{2i\pi j}{N} DFT(f)[j] e_j(x).$$

Puis :

$$DFT(f')[j] = \frac{2i\pi j}{N} DFT(f)[j].$$

Pour les fonctions réelles : il faut que  $f'$  soit réelle.

$$DFT(f')[j] = \begin{cases} \frac{2i\pi}{N} j DFT(f)[j] & \text{pour } 0 \leq j < N/2 \\ 0 & \text{pour } j = N/2 \\ \frac{2i\pi}{N} (j - N) DFT(f)[j] & \text{pour } N/2 < j < N \end{cases}$$

Cette relation est utile pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles. En particulier, l'équation de Poisson que nous allons résoudre en TP.

# Plan de la séance

Rappels

Diviser pour régner

Quicksort

Tri fusion

Transformée de Fourier rapide

Codons!

TP long : transformée de Fourier rapide et éditeur de Poisson.

## Idée

Comment copier/coller un morceau d'image dans une autre ? Pour que les transitions soient naturelles, il faut que les variations d'intensité au niveau de la frontière soient égales : c'est l'équation de Poisson.

Cette équation est simple à résoudre dans l'espace de Fourier. Il suffit ensuite de récupérer l'image lissée en appliquant la transformée de Fourier inverse.